第3講　2次関数(1)

1 [1]　放物線　$C：y=2x^2-3x+5$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C の頂点の座標を求めよ．

(2)　C を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ．

[2]　放物線 C と x 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ 1)$ を通り，y 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ -1)$ を通り，原点に関して対称な放物線は点 $(2,\ 0)$ を通る．放物線 C の式を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　$y=ax^2+bx+c$ の移動

2次関数のグラフの平行移動・対称移動は，「　　　」を移動させる．「　　　」に注意．

一般に，関数 $y=f(x)$ について

平行移動　x 軸方向に p，y 軸方向に q ⇒

対称移動　x 軸 ⇒　　　　y 軸 ⇒　　　　原点 ⇒

[2]　逆方向への移動

「$f(x)$ を移動したら $g(x)$ になる」は，「　　　」を逆方向に移動することを視野に．

「$f(x)$ を移動したら点 A を通る」は，「　　　」を逆方向に移動することを視野に．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 2 次関数のグラフが $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$ を通るとき，このグラフの軸の方程式を求めよ．さらにこのグラフが点 $(1,\ -2)$ を通るとき，この 2 次関数の最小値を求めよ．

［2］ a を定数とする．x の 2 次関数 $y=3x^2+ax+\frac{2}{3}a$ について，次の問いに答えよ．

(1) y の最小値 m を a を用いて表せ．　(2) m を最大とする a の値を求めよ．

【Point Pickup】

[1]　2 次関数のグラフの対称性

2 次関数のグラフは「　　　」に関して対称.

y 座標が同じ ＝「　　　からの距離」が同じ

2 次関数の最大，最小（基本）

変域に「　　」が含まれれば，「　　　」の y 座標が最大，最小の候補

[2]　最大値，最小値が「動く」

最大値，最小値に「　　　」が含まれるとき，その「　　　」の「　　　　」とみると最大値，最小値が動き出す.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=x^2-6x+10$ について，次の設問に答えよ．

(1) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 5$ における最大値および最小値を求めよ．

(2) a を正の定数とする．このとき，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を求めよ．

(3) b を定数とする．このとき，$f(x)$ の $b \leqq x \leqq b+3$ における最大値を b の式で表せ．

【Point Pickup】

2 次関数の最大値・最小値

下に凸の 2 次関数において

最小値　「　　」に注目.

変域に「　　」を 含む　　→ 頂点が最小

含まない → 軸に近い方が最小

最大値　「　　　　」を利用.

「　　　　　」が 軸より右 → 右端で最大

軸より左 → 左端で最大

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=3x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動したグラフが２点 $(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るとき，$a=-$ [ア]，$b=-$ [イウ] である．

(2)　$y=-3x^2+2ax+a$ の最大値を m とするとき，m の最小値は $-\dfrac{[エ]}{[オ]}$ である．

(3)　$f(x)=x^2+ax-2a+6$ の $x\geqq 0$ における最小値は

$a\leqq$ [カ] のとき　$-\dfrac{a^2}{[キ]}-[ク]a+6$

$a\geqq$ [カ] のとき　$-[ケ]a+6$

である．よって，$f(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値が１になるような a の値は [コ] 個ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　2次関数(1)

1 [1]　放物線　$C：y=2x^2-3x+5$ について，次の問いに答えよ． (1)　C の頂点の座標を求めよ． (2)　C を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ．

(1)　$C：y=2x^2-3x+5=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{31}{8}$　　よって頂点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{31}{8}\right)}$

(2)　放物線 C を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 平行移動すると，頂点は $\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{15}{8}\right)$ へ移動する．

さらに原点に関して対称に移動すると，頂点は $\left(-\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{15}{8}\right)$ へ移動し，グラフは上に凸となる．よって，求める放物線の方程式は

$y=-2\left(x+\dfrac{7}{4}\right)^2-\dfrac{15}{8}$　つまり　$\boldsymbol{y=-2x^2-7x-8}$

(別解)　$y=2x^2-3x+5$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 平行移動した放物線の方程式は

$y+2=2(x-1)^2-3(x-1)+5$　つまり　$y=2x^2-7x+8$

この放物線と原点に関して対称な放物線の方程式は

$-y=2(-x)^2-7(-x)+8$　　したがって　$y=-2x^2-7x-8$

1 [2]　放物線 C と x 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ 1)$ を通り，y 軸に関して対称な放物線は点 $(1,\ -1)$ を通り，原点に関して対称な放物線は点 $(2,\ 0)$ を通る．放物線 C の式を求めよ．

求める放物線 C の方程式を　$y=ax^2+bx+c$ とおく．

C が3点 $(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$，$(-2,\ 0)$ を通るので

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ a-b+c=-1 \\ 4a-2b+c=0 \end{cases}$$

これらより　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=0$，$c=-\dfrac{4}{3}$　　したがって求める式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 2 次関数のグラフが $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$ を通るとき，このグラフの軸の方程式を求めよ．さらにこのグラフが点 $(1,\ -2)$ を通るとき，この 2 次関数の最小値を求めよ．

2 点 $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$ を通る 2 次関数のグラフの軸は，グラフの対称性より　$\boldsymbol{x=2}$

よって条件を満たす 2 次関数は　$y=a(x-2)^2+q$　……①　とおける．

これが 3 点 $(-1,\ 6)$，$(5,\ 6)$，$(1,\ -2)$ を通るので

$6=9a+q$，$-2=a+q$　　これらより　$a=1$，$q=-3$

したがって①は　$y=(x-2)^2-3$　より　**最小値は -3**　（$x=2$ のとき）

2 ［2］ a を定数とする．x の 2 次関数 $y=3x^2+ax+\dfrac{2}{3}a$ について，次の問いに答えよ．

（1） y の最小値 m を a を用いて表せ．　　（2） m を最大とする a の値を求めよ．

（1） $y=3x^2+ax+\dfrac{2}{3}a=3\left(x+\dfrac{a}{6}\right)^2-\dfrac{a^2}{12}+\dfrac{2}{3}a$

したがって最小値 m は　$\boldsymbol{m=-\dfrac{1}{12}a^2+\dfrac{2}{3}a}$　（$x=-\dfrac{a}{6}$ のとき）

（2） $m=-\dfrac{1}{12}(a-4)^2+\dfrac{4}{3}$　　よって m を最大にする a は　$\boldsymbol{a=4}$

3 関数 $f(x)=x^2-6x+10$ について，次の設問に答えよ．

（1） $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 5$ における最大値および最小値を求めよ．

（2） a を正の定数とする．このとき，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値を求めよ．

（3） b を定数とする．このとき，$f(x)$ の $b\leqq x\leqq b+3$ における最大値を b の式で表せ．

（1） $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

よって　$0\leqq x\leqq 5$ における　**最大値　10（$x=0$ のとき）**　　**最小値　1（$x=3$ のとき）**

（2） $0\leqq x\leqq a$ における最大値は

$0<a<6$ のとき　$f(0)=10$

$a\geqq 6$ のとき　$f(a)=a^2-6a+10$

（3） $b\leqq x\leqq b+3$ における最大値は

$b\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき　$f(b)=b^2-6b+10$

$\dfrac{3}{2}\leqq b$ のとき　$f(b+3)=b^2+1$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=3x^2$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動したグラフが２点 $(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るとき，$a=-$ [ア]，$b=-$ [イウ] である．

(2)　$y=-3x^2+2ax+a$ の最大値を m とするとき，m の最小値は $-\dfrac{[エ]}{[オ]}$ である．

(3)　$f(x)=x^2+ax-2a+6$ の $x\geqq 0$ における最小値は

$a\leqq$ [カ] のとき　$-\dfrac{a^2}{[キ]}-[ク]a+6$

$a\geqq$ [カ] のとき　$-[ケ]a+6$

である．よって，$f(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値が１になるような a の値は [コ] 個ある．

解答例

(1)　移動後の放物線は，x^2 の係数が３で２点 $(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るので
その方程式は　$y=3(x+6)(x-2)$　と表せる．
変形すると　$y=3x^2+12x-36=3(x+2)^2-48$　より，頂点の座標は　$(-2,\ -48)$ である．移動前の放物線の頂点の座標は $(0,\ 0)$ より，
x 軸方向に -2，y 軸方向に -48 移動したことがわかる．　よって　$a=\mathbf{-2}$，$b=\mathbf{-48}$

(2)　$y=-3x^2+2ax+a=-3\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+\dfrac{a^2}{3}+a$

よって　$x=\dfrac{a}{3}$ のとき　最大値　$m=\dfrac{1}{3}a^2+a$

また，$m=\dfrac{1}{3}\left(a+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$　より　m は $a=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ をとる．

(3)　$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-2a+6$　$(x\geqq 0)$

$-\dfrac{a}{2}\geqq 0$　つまり　$a\leqq\mathbf{0}$ のとき　　最小値　$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{\mathbf{4}}-\mathbf{2}a+6$

$-\dfrac{a}{2}\leqq 0$　つまり　$a\geqq 0$ のとき　　最小値　$f(0)=-\mathbf{2}a+6$

$-\dfrac{a^2}{4}-2a+6=1$　より　$(a+10)(a-2)=0$　$a\leqq 0$ より　$a=-10$

$-2a+6=1$　より　$a=\dfrac{5}{2}$　これは $a\geqq 0$ を満たす．

よって題意を満たす a の値は　**２**個

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。